- تذكير:

- المتطابقات الشهيرة :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

- العلاقات المثلثية

$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$
$\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=\cos(2\alpha)$
$2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=\sin(2\alpha)$

$$\begin{cases}\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)\\ \cos(-\alpha)=\cos(\alpha)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos(\alpha)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(\alpha)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin(\alpha)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha)\end{cases}$$

- إشارة كثير حدود من الدرجة الأولى:

- إشارة $ax+b$ حيث a و b أعداد حقيقية مع $a\neq 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	عكس إشارة a	0	إشارة a

➢ إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية:

- إشارة ax^2+bx+c حيث a ، b و c أعداد حقيقية مع $a \neq 0$.

نسمي المميز: $\Delta = b^2-4ac$.

- في حالة $\Delta \succ 0$ لدينا حلان حقيقيان متمايزان : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

نفرض أن $x_1 \prec x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2 $+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	عكس إشارة a	إشارة a

- في حالة $\Delta = 0$ لدينا حل حقيقي مضاعف : $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$	$+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a	0	إشارة a

- في حالة $\Delta \prec 0$ لايوجد حلول في IR

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	إشارة a

➢ دالة تآلفية :

دالة تآلفية هي دالة من الشكل $x \mapsto ax+b$ حيث a و b أعداد حقيقية

منحناها البياني عبارة عن مستقيم ميله a

➢ توازي و تعامد مستقيمين :

نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $(\Delta): y = ax+b$ ، $(\Delta'): y = a'x+b'$

- يكون (Δ) و (Δ') متوازيان و ذلك من أجل $a = a'$.
- يكون (Δ) و (Δ') متعامدان و ذلك من أجل $a \times a' = -1$

القيمة المطلقة:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ & \text{أو} \\ -x & x \prec 0 \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة :

- من أجل كل قيم x من IR لدينا : $|-x|=|x|$.
- من أجل كل قيم x و y من IR لدينا : $|x+y|\leq|x|+|y|$.
- a عدد حقيقي موجب ، $|x|=a$ معناه $x=a$ أو $x=-a$.
- a عدد حقيقي موجب ، $|x|\prec a$ معناه $-a\prec x\prec a$.
- a عدد حقيقي موجب ، $|x|\succ a$ معناه $x\in\left]-\infty;-a\right[\cup\left]a;+\infty\right[$.

عمليات على النهايات :

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$l \quad ,l\in IR$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f\times g)$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$l \quad ,l\in IR_-^*$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f/g)$
$l \quad ,l\in IR$	$\pm\infty$	0
$l \quad ,l\in IR^*$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$

- **حالات عدم التعيين :** $\left(+\infty-\infty،\ \frac{0}{0}،\ \frac{\infty}{\infty}،\ 0\times\infty\right)$

المستقيمات المقاربة :

a و b عددان حقيقيان و f دالة لمتغير حقيقي x.

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ فإن منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=a$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ فإن منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=b$ في جوار $\pm\infty$.
- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ فإن منحنى الدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ في جوار $\pm\infty$ ، ($\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$).

تقارب منحنيان:

f و g دالتان لمتغير حقيقي x.

- إذا كانت $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$ فإن المنحنيان للدالتين f و g متقاربان في جوار $\pm\infty$.

الاستمرارية:

نعتبر الدالة f المعرفة على مجال I من IR و $x_0 \in I$.

• تعريف 1 :

نقول أن f دالة مستمرة عند x_0 ، إذا كانت: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

• تعريف 2 :

نقول أن f دالة مستمرة على يمين x_0 ، إذا كانت: $\lim\limits_{\underset{>}{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

• تعريف 3 :

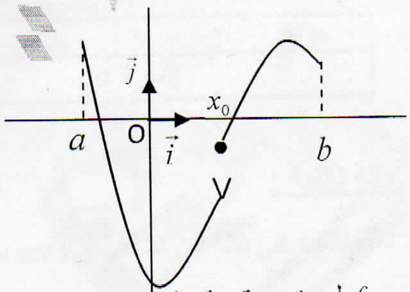
نقول أن f دالة مستمرة على يسار x_0 ، إذا كانت: $\lim\limits_{\underset{<}{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

• تعريف 4 :

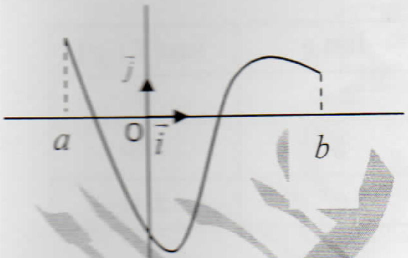
نقول أن f دالة مستمرة عند x_0 ، إذا كانت: $\lim\limits_{\underset{>}{x \to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\underset{<}{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$.

➢ تفسير هندسي:

يمكن رسم منحنى f دون رفع القلم.



f ليست مستمرة عند x_0



f مستمرة على المجال $[a;b]$.

f ليست مستمرة على المجال $[a;b]$.

f مستمرة على المجال $[a;x_0[$.

f مستمرة على المجال $[x_0;b]$.

• ملاحظة :

كل الدوال المرجعية مستمرة على مجموعة تعريفها.

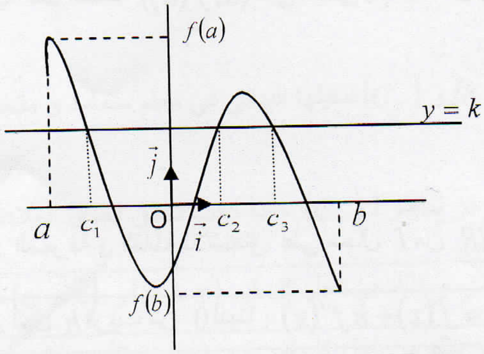
➢ مبرهنة القيم المتوسطة :

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و k عدد حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$.

• حالة خاصة: إذا كان $k = 0$ ، $f(a) \times f(b) \prec 0$

- **تفسير هندسي:**

منحنى الدالة f يقطع المستقيم $y=k$ في نقطة واحدة على الأقل داخل المجال $[a;b]$.



- **ملاحظة هامة :**

-إذا كانت f رتيبة تماما على المجال $[a;b]$، فإن c وحيد و منحنى الدالة f يقطع المستقيم $y=k$ في نقطة وحيدة داخل المجال $[a;b]$.

الاشتقاقية :

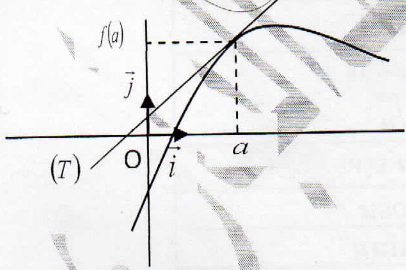
نعتبر الدالة f المعرفة على مجال I من IR و $a \in I$.

نقول أن f دالة قابلة للاشتقاق عند a، إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$ أو $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=\ell$

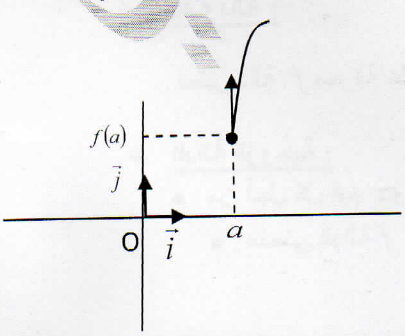
حيث $\ell \in IR$ ، ℓ : العدد المشتق ، $\ell = f'(a)$.

- **تفسير هندسي :**

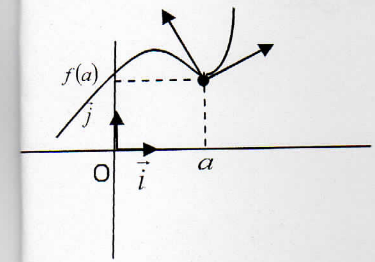
منحنى الدالة f يقبل مماس (T) ميله ℓ عند النقطة $(a;f(a))$ معادلته: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$



- في حالة $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+a)-f(a)}{h}=\infty$ ،الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a ،المنحنى البياني للدالة f يقبل نصف مماس عمودي معادلته $x=a$



• في حالة $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \ell$ و $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \ell'$ مع $\ell \neq \ell'$ ، الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a ، المنحنى البياني للدالة f يقبل نصفي مماسين ميلاهما ℓ و ℓ' يشكلان زاوية عند النقطة $(a; f(a))$ التي تسمى بالنقطة الزاوية .



التقريب التآلفي :

نعتبر الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على مجال I من IR .

من أجل h قريب من 0 لدينا : $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$

نسمي $f(x) + h f'(x)$ التقريب التآلفي لـ $f(x+h)$ من أجل h قريب من 0 المرفق بالدالة f .

جدول المشتقات :

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من IR و a عدد حقيقي.

الدالة f	الدالة المشتقة f'
a	0
ax	a
$x^n , n \in IN^*$	nx^{n-1}
$u+v$	$u'+v'$
au	au'
$u \times v$	$u'v + v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
$u^n , n \in IN^*$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u o v$	$v' \times u' o v$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u)$

شفعية دالة :

نعتبر دالة f معرفة على I من IR و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

الدالة الزوجية :

• من أجل كل قيم x و $(-x)$ من I : $f(-x) = f(x)$

• منحنى الدالة f يقبل محور التراتيب $x = 0$ كمحور تناظر.

➢ **الدالة الفردية :**

- من أجل كل قيم x و $(-x)$ من I : $f(-x)=-f(x)$
- منحنى الدالة f يقبل المبدأ $O(0;0)$ كمركز تناظر.

مركز تناظر :

نعتبر دالة f معرفة على I من IR و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و α ، β عددان حقيقيان.

نقول أن النقطة $\omega(\alpha;\beta)$ هي مركز تناظر لـ (C_f) ، إذا كانت تحقق إحدى العلاقتين:

$f(\alpha-x)+f(\alpha+x)=2\beta$ و ذلك من أجل كل قيم $(\alpha+x)$ و $(\alpha-x)$ من I
$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ و ذلك من أجل كل قيم x و $(2\alpha-x)$ من I

محور تناظر :

نعتبر دالة f معرفة على I من IR و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ و α عدد حقيقي.

نقول أن المستقيم $x=\alpha$ هو محور تناظر لـ (C_f) ، إذا كان يحقق إحدى العلاقتين:

$f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$ و ذلك من أجل كل قيم $(\alpha+x)$ و $(\alpha-x)$ من I
$f(2\alpha-x)=f(x)$ و ذلك من أجل كل قيم x و $(2\alpha-x)$ من I

الدالة الأسية

تعريف

الدالة $x \mapsto e^x$ هي دالة معرفة على IR و تأخذ صورها في المجال $]0;+\infty[$.

حيث : $e \approx 2,718$. $e^0=1$ و $e^1=e$

$e^x \succ 0$ من أجل كل قيم x من IR

➢ **خواص:**

$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$e^{na} = \left(e^a\right)^n = \left(e^n\right)^a$$

➢ **حل معادلة من الشكل :** $e^x = a$ مع a عدد حقيقي
- في حالة $a \leq 0$ لايوجد حلول.
- في حالة $a \succ 0$ يوجد حل هو : $x = \ln a$ ($\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري).

➢ **مشتقة دالة أسية:**

الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على المجال IR .

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

نعتبر u دالة معرفة على مجال I من IR ، $\left(e^u\right)' = u'e^u$

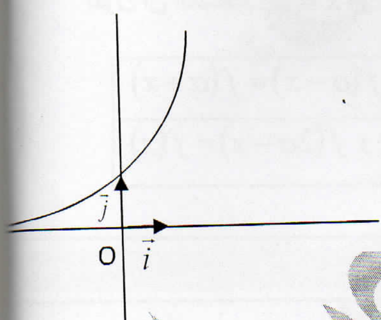
➢ **النهايات الشهيرة للدالة الأسية:**

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

➢ **تغيرات الدالة الأسية**

الدالة $x \mapsto e^x$ متزايدة تماما على IR .

x	$-\infty$ $+\infty$
e^x	$0 \nearrow +\infty$



➢ **التزايد المقارن :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ؛	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \, , n \in IN$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ ؛	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \, , n \in IN$

➢ **معادلة تفاضلية من الشكل :** $y' = ay + b$

y دالة ذات المتغير x و y' دالتها المشتقة ، a و b أعداد حقيقية .

- الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هو $y = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ حيث C ثابت حقيقي.

تعريف:

الدالة $x \longmapsto \ln x$ هي دالة معرفة على $]0;+\infty[$ و تأخذ صورها في المجال IR.

حيث: $\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري.

➢ **إشارة الدالة** : $x \longmapsto \ln x$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

حيث : $\ln e = 1$ و $\ln 1 = 0$.

➢ **خواص:**

▪ a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

$$\ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$-\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$n \ln a = \ln(a^n)$$

▪ a و b عددان حقيقيان غير معدومين.

$$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$$

$\ln(a^n) = n\ln|a|$ (n عدد صحيح زوجي)

• **أمثلة :**

$\ln a^2 = 2\ln|a|$ ، $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln(a)$ ، $\ln a^3 = 3\ln(a)$

➢ **حل معادلة من الشكل** : $\ln x = a$ مع a عدد حقيقي.

الحل هو : $x = e^a$.

➢ **مشتقة دالة اللوغاريتمية:**

الدالة $x \longmapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

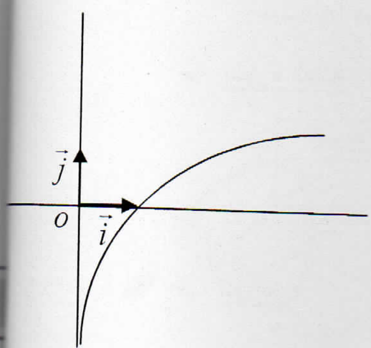
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

نعتبر u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال I من IR حيث $u \succ 0$ ، $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

➢ **النهايات الشهيرة للدالة اللوغاريتمية:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \;؛\; \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \;؛\; \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

➢ **تغيرات الدالة اللوغاريتمية:**



الدالة $x\mapsto \ln x$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

x		0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln x$		$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

➢ **التزايد المقارن :**

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0^+ \;,n\in IN^*$	؛ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$
$\lim_{x\to 0^+}x^n\ln x=0^- \;,n\in IN^*$	؛ $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0^-$

➢ **تركيب الدالة الأسية مع اللوغاريتمية :**

$e^{n\ln a}=a^n$ ؛ $e^{-\ln a}=\frac{1}{a}$ ؛ $e^{\ln a}=a$ مع a عدد حقيقي موجب تماما .

$\ln e^a=a$ مع a عدد حقيقي

● **أمثلة :**

$e^{-\ln 3}=\frac{1}{3}$ ، $e^{2\ln x}=x^2$ ، $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$

الدالة الأسية ذات الأساس a

✚ **تعريف :**

a عدد حقيقي موجب تماما يختلف عن 1

الدالة $x\mapsto a^x$ هي دالة معرفة على IR و تأخذ صورها في المجال $]0;+\infty[$.

يمكن كتابة : $\boxed{a^x=e^{x\ln a}}$

➢ **النهايات :**

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & a\in\,]0;1[\\ 0 & a\in\,]1;+\infty[\end{cases} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & a\in\,]0;1[\\ +\infty & a\in\,]1;+\infty[\end{cases}$$

➢ **مشتقة دالة أسية ذات الأساس a:**

الدالة $x \mapsto a^x$ قابلة للاشتقاق على IR

$$\left(a^x\right)' = (\ln a)a^x.$$

الدالة اللوغاريتمية العشرية

الدالة $x \mapsto \log x$ هي دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ حيث : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

$\log 1 = 0$ و $\log 10 = 1$

▪ **ملاحظة :** تتميز بنفس خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

➢ **حل المعادلة من الشكل :** $\log x = a$

الحل هو $x = 10^a$ و ذلك من أجل كل عدد حقيقي a.

الدالة الجذر النوني

تعريف:

n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ معرفة على المجال $[0;+\infty[$ حيث : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

يمكن كتابتها على الشكل : $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{\ln x}{n}}$ و ذلك من أجل كل قيم x من المجال $]0;+\infty[$

• **خواص :** n و p عددان طبيعيان غير معدومان يختلفان عن 1

$$\boxed{\begin{gathered} \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \\ \sqrt[n]{x} = \left(\sqrt[np]{x}\right)^p \\ \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x} \\ x^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{x^p} \end{gathered}}$$

➢ **حل المعادلة من الشكل** : $\sqrt[n]{x} = a$

a عدد حقيقي موجب و n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1

الحل هو $x = a^n$.

➢ **حل المعادلة من الشكل** : $x^n = a$

a عدد حقيقي موجب و n عدد طبيعي غير معدوم يختلف عن 1

- في حالة n عدد طبيعي زوجي يوجد حلين في IR : $x = \sqrt[n]{a}$ ، $x = -\sqrt[n]{a}$
- في حالة n عدد طبيعي فردي يوجد حل وحيد في IR_+ : $x = \sqrt[n]{a}$

➢ **منحنيات الدوال المرجعية :**